



TITLE:

量子的状態の空間における距離(マニフォールド上での量子化および量子論)

AUTHOR(S):

平山, 実

CITATION:

平山, 実. 量子的状態の空間における距離(マニフォールド上での量子化および量子論). 物性研究 1996, 67(3): 362-363

ISSUE DATE:

1996-12-20

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/95954>

RIGHT:

量子的状態の空間における距離

富山大・理 平山 実

ヒルベルト空間 h の正規直交系をなす N 個のベクトルの組

$$\Psi = (|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, \dots, |\psi_N\rangle)$$

は N 枠と呼ばれ, 集合

$$[\Psi] = \{\Psi u : u \in U(N)\}$$

は N 平面と呼ばれる. h のベクトルから作られる N 平面の全体 G_N は複素次元 N ($\dim h = N$) の多様体となりグラスマン多様体と呼ばれる. ここでは

- (a) G_N の 2 点 $[\Psi]$ と $[\Phi]$ の間の距離 $d([\Psi], [\Phi])$ を求めること.
- (b) その距離が三角不等式

$$d([\Psi], [\Phi]) \leq d([\Psi], [\Xi]) + d([\Xi], [\Phi])$$

をみたすことの証明.

- (c) 距離公式を Anandan-Aharonov 型不確定性関係式へ応用すること.

を行った. 本稿では (c) についてのみ記す. 尚, 稿末に現れる不等式の右辺が $d([\Psi(t_1)], [\Psi(t_2)])$ を表している.

時間・エネルギー不確定性関係式は

$$\tau_A \Delta H \geq \frac{\hbar}{2}$$

で与えられる. ここで A は t を陽に含まない演算子で

$$\Delta A = \sqrt{\langle \psi(t) | A^2 | \psi(t) \rangle - \langle \psi(t) | A | \psi(t) \rangle^2}$$

$$\tau_A = \left| \frac{d}{dt} \langle \psi(t) | A | \psi(t) \rangle \right|^{-1} \Delta A$$

である. これに対し, 1990 年に Anandan と Aharonov は

$$\int_{t_1}^{t_2} \Delta \mathcal{E}(t) dt \geq \hbar \text{Arccos}(|\langle \psi(t_1) | \psi(t_2) \rangle|)$$

なる不等式を導いた. $H(t)$ は一般には時間に依存してもよいものとし, そのバラツキは

$$\Delta \mathcal{E}(t) = \sqrt{\langle \psi(t) | H(t)^2 | \psi(t) \rangle - \langle \psi(t) | H(t) | \psi(t) \rangle^2}$$

で定義される. Arccos が現れるのは, 複素射影空間の幾何学による. (a) と (b) の結果から

$$\langle \psi_i(t) | \psi_j(t) \rangle = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots, N$$

をみたす N 個のベクトルの組に関するエネルギーのバラツキ

$$\Delta \mathcal{E}_N(t) = \sqrt{\sum_{i=1}^N \langle \psi_i(t) | H(t)^2 | \psi_i(t) \rangle - \sum_{i,j=1}^N | \langle \psi_i(t) | H(t) | \psi_j(t) \rangle |^2}$$

が、不等式

$$\int_{t_1}^{t_2} \Delta \mathcal{E}_N(t) dt \geq \hbar \sqrt{\sum_{i=1}^N \left\{ \text{Arccos} \sqrt{\kappa_i(t_1, t_2)} \right\}^2}$$

をみたすことが導かれる。但し $\kappa_i(t_1, t_2)$ は下で定義される $N \times N$ 行列 $K(t_1, t_2)$ の固有値である。

$$A(t_1, t_2) = (a_{ij}(t_1, t_2)), \quad a_{ij}(t_1, t_2) = \langle \psi_i(t_1) | \psi_j(t_2) \rangle$$

$$K(t_1, t_2) = A^\dagger(t_1, t_2) A(t_1, t_2)$$